CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1975

•

OPTION SCIENCES

MATHEMATIQUES (Epreuve A) (4 h)

N.B. - *La partie II est indépendante de la partie I ; la partie III est indépendante de la partie II.*

I

1°) Calculer $I_p = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$, pour $p \in \mathbb{N}^*$, en précisant pourquoi cette intégrale est convergente.

2°) Démontrer que l'intégrale $J = \int_0^{\alpha} x^p e^{-x \cos y}\, dy$ tend vers zéro, quand x tend vers $+\infty$ pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, p étant encore un entier naturel.

3°) Montrer que les deux expressions :

$$\omega_1 = e^{-x \cos y}\, x^{p-1} \left[\cos (py - x \sin y)\, dx - x \sin (py - x \sin y)\, dy\right]$$

$$\omega_2 = e^{-x \cos y}\, x^{p-1} \left[\sin (py - x \sin y)\, dx + x \cos (py - x \sin y)\, dy\right]$$

sont des différentielles exactes.

4°) On considère les points O (0, 0), A (a, 0), B (0, α), C (a, α) où $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et a est un paramètre réel positif dont on pourra disposer.

Sachant que l'intégration de ω_1 et ω_2 sur le contour OACBO donne la valeur zéro, en déduire la valeur des intégrales :

$$C_p = \int_0^{+\infty} e^{-x \cos \alpha}\, x^{p-1} \cos (x \sin \alpha)\, dx$$

$$S_p = \int_0^{+\infty} e^{-x \cos \alpha}\, x^{p-1} \sin (x \sin \alpha)\, dx$$

$$C'_p = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{p-1} \cos (x \operatorname{tg} \alpha)\, dx$$

$$S'_p = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{p-1} \sin (x \operatorname{tg} \alpha)\, dx$$

II

On considère l'équation différentielle linéaire du 2d ordre avec $x \in \left]-1, 1\right[- \{0\}$

$$(E)\quad x^2 (1 - x^2)\, y'' + x (5x^2 - 6)\, y' + 12y = 0$$

1°) Faire le changement de variable et de fonction :

$$x = \cos \theta; \qquad y = z\, x^3 \qquad \theta \in \left]0, \pi\right[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

Intégrer l'équation ainsi obtenue où la fonction inconnue est z et la variable θ. En déduire l'intégrale générale de (E).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail